dr hab. Andrzej Okolewski
Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka

Łódź, 24 października 2020 roku

Recenzja
rozprawy doktorskiej mgr Anety Augustynowicz
pt. Prawie pewne własności asymptotyczne statystyk porządkowych

Przedmiotem recenzowanej pracy są własności asymptotyczne statystyk porządkowych. Pierwszy wynik tego typu pochodzi od Laplace'a (1847) i dotyczy mediany z próby. Prekursorami badań rozkładów granicznych wartości ekstremalnych ciągów zmiennych losowych byli Fréchet (1927) oraz Fisher i Tippett (1928). Analizą problemów asymptotycznych mieszczących się w ramach teorii statystyk porządkowych zajmowali się m.in. tak znakomici matematycy jak Kołmogorow, Erdős czy Rényi. Zainicjowane przez Smirnova (1949) i Bahadura (1966) badania prawie pewnych własności asymptotycznych statystyk porządkowych są systematycznie prowadzone do chwili obecnej. Autorka prezentowanej rozprawy bierze w nich aktywny udział.

Praca składa się z pięciu rozdziałów i dodatku. Rozdział pierwszy stanowi wstęp, w którym dokonano przeglądu najważniejszych wyników dotyczących prawie pewnych własności statystyk porządkowych, sformułowano cel rozprawy oraz krótko opisano uzyskane rezultaty.

W rozdziale drugim przytoczono najistotniejsze fakty z teorii ergodycznej, wykorzystane w dalszej części pracy. Dzięki temu rozdziałowi i dodatkowi, nawet czytelnik nieznający tej teorii może oddać się lekturze bez potrzeby korzystania z dodatkowych źródeł. Kolejne rozdziały powstały na podstawie czterech artykułów Doktorantki, z których dwa są wspólne z Promotor, dr hab. Anną Dembińską.

W trzecim rozdziale przypomniano znane oraz podano nowe własności warunkowych kwantyli. Ponadto wprowadzono pojęcie warunkowego (prawego i lewego) końca nośnika zmiennej losowej względem danego sigma-ciała zdarzeń i zbadano jego własności. Wyniki te wykorzystano w kolejnym rozdziale do opisu rozkładów granicznych centralnych i skrajnych statystyk porządkowych.

Najciekawszy z matematycznego punktu widzenia jest rozdział czwarty pracy. Zawiera on rozwinięcie pomysłów i wyników Dembińskiej (2014), która stosując dwuetapową procedurę wyznaczyła rozkłady graniczne centralnych statystyk porządkowych ze ściśle stacjonarnego ciągu zmiennych losowych $\mathbb{X} = (X_n\colon n \geqslant 1)$. Pierwszy z wyników Doktorantki stanowi interesującą modyfikację wyniku Dembińskiej, polegającą na charakteryzacji rozkładu granicznego za pomocą warunkowego kwantyla rzędu λ zmiennej losowej X_1 względem sigma-ciała $\mathcal{I}^{\mathbb{X}}$ zdarzeń niezmienniczych względem $\mathbb{X}$. Następnie rozważono przypadek skrajnych statystyk porządkowych i rozszerzono klasyczne twierdzenie ergodyczne dla obserwacji niezależnych o tym samym rozkładzie do przypadku, gdy obserwacje są ciągiem ściśle stacjonarnym i ergodycznym, a także do przypadku, gdy obserwacje są takim ciągiem ściśle stacjonarnym, że szereg liczbowy występujący we wzorze (4.2.3) jest zbieżny. Ponadto w trzech krokach wykazano, że ciąg skrajnych statystyk porządkowych z dowolnego ściśle stacjonarnego ciągu $\mathbb{X} = (X_n\colon n \geqslant 1)$ jest z prawdopodobieństwem 1 zbieżny do warunkowego prawego końca nośnika zmiennej losowej X_1 względem sigma-ciała $\mathcal{I}^{\mathbb{X}}$.

Z punktu widzenia zastosowań bardzo ciekawy jest również piąty rozdział pracy. Zawiera on rozwinięcie wyników Dembińskiej (2017) dotyczących własności asymptotycznych liczby $K^{\mathbb{X}}_{k_n,n}(A)$ obserwacji przyjmujących wartości w losowym zbiorze wyznaczonym przez zbiór borelowski $A \subset \mathbb{R}$ i k_n-tą statystykę porządkową ze ściśle stacjonarnego ciągu $\mathbb{X} = (X_n\colon n \geqslant 1)$. Przedstawiono nową postać twierdzenia granicznego dla częstości $K^{\mathbb{X}}_{k_n,n}(A)/n$ dla centralnych statystyk porządkowych oraz podano odpowiednik tego twierdzenia dla skrajnych statystyk porządkowych. Następnie rozszerzono te wyniki na przypadek prób o losowej liczności, podano zastosowania przedstawionych uogólnień w modelu kolektywnym portfela ubezpieczeniowego i przedyskutowano możliwość ich wykorzystania do weryfikacji poprawności rozważanego modelu.

Rozprawa doktorska mgr Anety Augustynowicz zawiera wiele oryginalnych, interesujących i ważnych rezultatów, jest również napisana na wysokim poziomie matematycznym. Zwraca uwagę swoboda, z jaką Autorka operuje aparatem rachunku prawdopodobieństwa, precyzja matematyczna dowodów, łatwość w przeprowadzaniu skomplikowanych rozumowań. Wyniki są trafne, wyczerpująco komentowane oraz ilustrowane dobrze dobranymi przykładami i kontrprzykładami.

A. Cl.

Praca jest prawidłowo skonstruowana pod względem formalnym, oznaczenia są przemyślane, a zagadnienia i ich rozwiązania – przedstawione w sposób klarowny. Rozprawa jest napisana poprawnym językiem. Definicje, lematy, twierdzenia oraz komentarze są formułowane precyzyjnie i jasno. Na uwagę zasługuje fakt, że rozprawa została zredagowana z dużą starannością. Zauważyłem jedynie kilka drobnych usterek:

str. 9^6 powinno być *wystarczająco*

str. 11^{12} by mówić o $(X_{k_n:n}\colon n \geqslant 1)$ trzeba dysponować nieskończonym ciągiem $(X_n\colon n \geqslant 1)$

str. 12_6 zbędne *jak*

str. 13^2 określenie *obszar* zwykle dotyczy zbioru otwartego i spójnego

str. $13^{4 i 7}$ symbolem $\mathbb{X}$ oznaczono dwa różne obiekty

str. 17^{16} i 29^5 *Załóżmy* zamiast *Przypuśćmy*

str. 22^{10} nowych własności

str. 45_9 *to*

str. 49_8 powinno być *warunki wystarczające*

str. 59^9 symbol A oznaczał wcześniej ustalony zbiór borelowski.

Oczywiście te drobne usterki nie umniejszają mojej bardzo wysokiej oceny treści rozprawy.

W konkluzji stwierdzam, że przedstawiona rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Pani magister Anety Augustynowicz do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

A. Okolewski